Capítulo 4

Ecuaciones en derivadas parciales

El presente capítulo se dedica a alguna de las ecuaciones más importantes que se presentan en aplicaciones a la ingeniería. Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) surgen en relación con varios problemas físicos y geométricos cuando las funciones que intervienen dependen de dos o más variables independientes. Es justo señalar que sólo los sistemas físicos más sencillos pueden modelarse por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), mientras que la mayoría de los problemas de mecánica (dinámica, elasticidad) de fluidos y sólidos, transferencia de calor, teoría electromagnética, mecánica cuántica y otras áreas de la física llevan a EDP. De hecho, el rango de aplicación de estas últimas es enorme en comparación con el de las EDO.

4.1. Conceptos básicos

En primer lugar recordemos que para una función real de variable vectorial $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene la siguiente notación

$$u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1},$$

$$u_{x_1 x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right),$$

$$u_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$

y

$$u_{\underbrace{x_1 ... x_1}_{k_1} ... \underbrace{x_n ... x_n}_{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

Una ecuación en la que intervienen una o más derivadas parciales de una función $u(x_1, x_2, ..., x_n) = u(\mathbf{x})$ (incógnita de la ecuación-variable dependiente) de dos o más ($n \geq 2$) variables independientes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se llama **Ecuación Diferencial Parcial**[1]**,** es decir,

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}, ...\right) = 0 \quad (4.1)$$

donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo $p \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ y $k_1, k_2, ..., k_n$ son números enteros no negativos tales que $k_1+k_2+...+k_n = m$.

Para los casos $n = 2$ y $n = 3$ utilizaremos la siguiente notación

$$n = 2 \Longrightarrow (x_1, x_2) = \begin{cases} (x, y) & \text{para problemas espaciales} \\ \\ (t, x) & \text{para problemas espacio-temporales} \end{cases}$$

y

$$n = 3 \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x, y, z) & \text{para problemas espaciales} \\ \\ (t, x, y) & \text{para problemas espacio-temporales} \end{cases}$$

La derivada de mayor orden indica el orden de la ecuación. Por ejemplo,

$$u + u_x + u_y = 0$$

es una ecuación de orden uno mientras que

$$y - u_x + u \cdot u_{xy} = xu$$

es una ecuación de orden dos, que será el orden máximo que estudiaremos en este curso.

Ejemplo 1 *A continuación se introducen algunas EDP y se indica su correspondiente orden.*

[1]Las relaciones expresadas por una igualdad en la cual figuran una o varias derivadas parciales, de cualquier orden, de una función desconocida, con más de una variable independiente, recibe el nombre de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP). En estas igualdades puede figurar también la misma función desconocida y asimismo otras funciones conocidas de las variables independientes.

Ecuación	**Expresión**	**Orden**
Laplace	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	2
Fourier	$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$	2
Onda	$u_{xx} - u_{yy} = 0$	2
Euler-Bernouilli	$u_{tt} + \beta^2 u_{xxxx} = 0$	4
Schrodinger	$u_t - i\beta u_{xx} = 0$	2
Helmoltz	$u_{xx} + u_{yy} + \alpha^2 u = 0$	2
Korleneg de Vries	$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0$	3
Tricormi	$u_{xx} + x u_{yy} = 0$	2

La ecuaciones en derivadas parciales (EDP) son bastantes difíciles de resolver (por su extrema dificulta no estudiaremos los sistemas de EDP). De hecho, no existe un teorema de existencia e unicidad "sencilloçomo el que se estudia para problemas de condiciones iniciales de sistemas de EDO. Por todo ello, las EDP son fuente de estudio en la actualidad para muchos matemáticos siendo una de las áreas de las matemáticas en las que más se investiga.

Llamaremos solución de una EDP en alguna región Ω del espacio $\mathbb{R}^n$ de las variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a una función $u = u\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}\,(\Omega)$ de forma que al sustituir u y todas sus derivadas parciales en la ecuación (4.1) obtenemos una identidad. (Generalmente se exigirá que u sea continua o diferenciable en $\partial\Omega$, la frontera de Ω, que tenga todas las derivadas parciales en Ω y que se cumpla la ecuación en el interior de Ω).

Ejemplo 2 *Hallar una función $u\,(t, x)$ sabiendo que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{sen} t - 3t^2 x.$$

En general, la totalidad de las soluciones de una ecuación diferencial parcial es muy grande. Por ejemplo, las funciones

$$u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln\left(x^2 + y^2\right),$$

son soluciones de la Ecuación de Laplace. Veremos más tarde que la única solución de una ecuación diferencial parcial correspondiente a un problema físico dado se obtiene mediante el uso de condiciones adicionales que surgen del problema.

4.2. Algunos métodos sencillos para resolver una EDP

4.2.1. Integración Directa

Algunas EDP pueden resolverse mediante **integración directa**, como en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 3 *Resolver*

$$u_x = x + y.$$

Ejemplo 4 *Hallar la solución* $u = u(t, x)$ *de la ecuación*

$$u_{xt} = 0.$$

Ejemplo 5 *Resolver*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

4.2.2. Cambio de variable

Otras veces una EDP pueden resolverse mediante un cambio de variables, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 *Resolver*

$$u_x - u_y = 0.$$

4.2.3. Método de separación de variables

También es posible resolver algunas EDP haciendo cierta suposición de como es la función solución. En el caso del método de separación de variables se supone que la función solución tiene la forma

$$u(x,y) = F(x)\,G(y)$$

con

$$\begin{gathered} u_x(x,y) = F'(x)\,G(y), \qquad u_y(x,y) = F(x)\,G'(y), \\ u_{xx}(x,y) = F''(x)\,G(y), \qquad u_{yy}(x,y) = F(x)\,G''(y), \\ u_{xy}(x,y) = F'(x)\,G'(y) \end{gathered}$$

y, en general,

$$u_{\underbrace{x\ldots x}_{k}\underbrace{y\ldots y}_{n-k}} = \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x,y) = F^{(k)}(x)\cdot G^{(n-k)}(y).$$

de manera que al sustituir estas expresiones en la EDP es posible reducir la EDP dada en un sistema de EDO con dos ecuaciones que puede resolverse con los métodos habituales.

Ejemplo 7 *Resolver la siguiente EDP por el método de separación de variable*

$$u_{xx} = 4u_y.$$

Con este ejemplo hemos puesto de manifiesto que, de forma similar a lo que ocurre con las EDO para las que la solución general implicaba la existencia de constantes arbitrarias, en este caso las soluciones de una EDP suele implicar a funciones arbitrarias. En general, al resolver una EDP podemos obtener una cantidad inifinita de soluciones que dependerán de esas funciones arbitrarias. Para obtener una solución únca para problemas de EDP tal y como ocurre con las EDO, estos problemas deben llevar asociadas unas condiciones o restricciones que pueden ser de dos tipos: condiciones iniciales y/o de contorno. Veamos esta diferencia considerando por ejemplo el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in]0,1[\\ u(0,x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

que, como veremos posteriormente modela la variación de temperatura u de una varilla unidimensional de longitud 1 a lo largo del tiempo. La ecuación de segundo orden $u_t = u_{xx}$ se conoce como ecuación del calor, que es este problema tienen asociados dos tipos de condiciones. La condición $u(0,x) = f(x)$ establece la temperatura inicial de la varilla para todo punto de ésta $y \in [0,1]$, por lo que hablamos de ella como una **condición inicial**. Sin embargo, la condición $u(t,0) = u(t,1) = 0$ nos indica que los valores de la temperatura en los extremos de la varilla son fijos para cada instante de tiempo y se denominan **condiciones de contorno**.

4.3. Ecuaciones lineales de orden 2

En esta sección estudiaremos con más detalle las ecuaciones lineales de orden 2 en dos dimensiones con coeficientes constantes que son de la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y) \tag{4.2}$$

donde A, B, C, D, E, $F \in \mathbb{R}$.

Para la EDP (4.2) definimos el discriminante como

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

y diremos que la EDP es

- Hiperbólica si $\Delta > 0$.
- Parabólica si $\Delta = 0$.
- Elíptica si $\Delta < 0$.

Esta clasificación está basada en la posibilidad de reducir la ecuación general mediante un cambio de coordenadas a una forma canónica o estándar. Una vez escritas en forma canónica esposible reducir la ecuación, mediante cambios de coordenadas adecuados, a una del tipo siguiente

$$\begin{aligned} \omega_{ss} + \omega_{tt} + \gamma\omega &= \varphi(s,t) \\ \omega_{ss} - \omega_{tt} + \gamma\omega &= \varphi(s,t) \\ \omega_{tt} - \omega_s &= \varphi(s,t) \\ \omega_{ss} + \gamma\omega &= \varphi(s,t) \end{aligned}$$

donde $\gamma \in \{-1,0,1\}$ y $\varphi(s,t)$ es una función cualquiera en las nuevas variables (s,t).

4.4. Ecuaciones en derivadas parciales clásicas

4.4.1. Ecuación del calor

La ecuación del calor describe la variación de la temperatura en una región a lo largo del tiempo. En el caso de una dimensión describirá la temperatura en una barra de longitud L y se expresa como

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0,\ x \in]0, L[\\ u(0, x) = f(x), & x \in]0, L[\\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

La condición de $u(t, 0) = u(t, L)$ son llamadas condiciones de contorno e indican que la temperatura en los extremos de la barra es constante e igual a cero. La condición $u(0, x) = f(x)$ es una condición inicial e indica la distribución de temperatura en la barra en el instante inicial.

Vamos a tratar de resolver la ecuación mediante el método de separación de variables. Supondremos que la solución $u(t, x)$ puede ponerse como

$$u(t, x) = F(t) G(x)$$

con

$$u_t(t, x) = F'(t) G(x), \qquad u_x(t, x) = F(t) G'(x),$$

y

$$u_{xx}(t, x) = F(x) G''(x)$$

y sustituyendo en la ecuación del calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \Longleftrightarrow F'(t) G(x) = \alpha^2 F(x) G''(x).$$

Obviamente la solución trivial $u \equiv 0$ es solución del problema, así que buscammos soluciones alternativas y supondremos que $F(t) \neq 0 \neq G(x)$, por tanto

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}.$$

Como el lado izquierdo de la igualdad depende solo de t y el lado derecho depende solo de x, ambos deben ser constantes, es decir

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \tag{4.3}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

De (4.3) obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias (lineales de coeficientes constantes)

$$F'(t) + \lambda \alpha^2 F(t) = 0$$

y

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0.$$

Por otro lado al suponer que $u(t,x) = F(t)G(x)$ se obtiene de las condiciones de contorno que

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0 \Longrightarrow u(t,0) = F(t)G(0) = 0 \\ u(t,L) &= 0 \Longrightarrow u(t,L) = F(t)G(L) = 0 \end{aligned}$$

y como $F(t) \neq 0$ se tiene que $G(0) = G(L) = 0$, de donde obtenemos el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(x) + \lambda G(x) = 0, \\ G(0) = G(L) = 0, \end{cases}$$

cuya solución dependerá del valor de λ.

1. **Caso** $\lambda = 0$.

   La ecuación diferencial será

   $$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Longrightarrow G''(x) = 0$$

   cuya solución general es de la forma

   $$G(x) = A_1 x + B_1$$

   y utilizando las condiciones de contorno

   $$G(0) = 0 \Longrightarrow B_1 = 0$$

   y, al ser $L \neq 0$

   $$G(L) = 0 \Longrightarrow A_1 L + B_1 = 0 \Longrightarrow A_1 = 0.$$

   Consecuentemente obtenemos la solución trivial $G(x) = 0$ para todo $x \in \,]0, L[$.

2. **Caso** $\lambda < 0$.

   Supongamos que $\lambda = -a^2$. La ecuación diferencial será

   $$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Longrightarrow G''(x) - a^2 G(x) = 0 = 0$$

   cuya solución general es de la forma

   $$G(x) = A_2 e^{ax} + B_2 e^{-ax}.$$

   Utilizando las condiciones de contorno para encontrar los valores A_2 y B_2

   $$G(0) = 0 \Longrightarrow A_2 + B_2 = 0$$

y
$$G(L) = 0 \Longrightarrow A_2 e^{aL} + B_2 e^{-aL} = 0$$
obtenemos un sistema lineal homogéneo para las incognitas A_2 y B_2. El determinante de la matriz de coeficientes es
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{aL} & e^{-aL} \end{vmatrix} = e^{-aL} - e^{aL} = -2\sinh(aL)$$
y puesto que a es no nulo la única solución del sistema es la trivial $A_2 = B_2 = 0$, por lo que, $G(x) = 0$ para todo $x \in]0, L[$.

3. **Caso** $\lambda > 0$.

Supongamos que $\lambda = a^2$. La ecuación diferencial será
$$G''(x) + \lambda G(x) = 0 \Longrightarrow G''(x) + a^2 G(x) = 0 = 0$$
cuya solución general es de la forma
$$G(x) = A_3 \cos(ax) + B_3 \operatorname{sen}(ax).$$
Utilizando las condiciones de contorno para encontrar los valores A_3 y B_3
$$G(0) = 0 \Longrightarrow A_3 = 0$$
y
$$G(L) = 0 \Longrightarrow A_3 \cos(aL) + B_3 \operatorname{sen}(aL) = 0$$
de donde
$$B_3 \operatorname{sen}(aL) = 0.$$
Como buscamos una solución no trivial debemos tener que $B_3 \neq 0$ y $\operatorname{sen}(aL) = 0$, con lo que
$$aL = n\pi \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow a = \frac{n\pi}{L} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
es decir,
$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
Recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{Z}$, tendremos una posible solución de la EDO, es decir, si escribimos
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
entonces
$$G_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$
Como el caso $n = 0$ no conduce de nuevo a la solución trivial, luego supondremos que $n \geq 1$.

Utilizando ahora la otra ecuación diferencial

$$F'(t) + \lambda_n \alpha^2 F(t) = 0$$

y los valores de λ_n obtenidos tenemos la EDO

$$F'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 F(t) = 0$$

cuya solución para cada $n \geq 1$ es de la forma

$$F(t) = C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 t\right)$$

donde $C_n \in \mathbb{R}$.

Finalmente, la solución de la EDP será de la forma

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F_n(t)\, G(x) = C_n B_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 t\right) \end{aligned}$$

donde $c_n = C_n B_n$. Por la linealidad de la EDO cualquier combinación lineal de soluciones es otra solución, por tanto podemos considerar como solución general a

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 t\right) \tag{4.4}$$

y utilizando la condición incial

$$u(0,x) = f(x) \Longrightarrow u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Podemos calcular el valor de los coeficientes b_n, si observamos la expresión como un desarrollo de Fourier, concretamente el de la extensión impar de $f(x)$, por tanto

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Diremos que la expresión obtenida en (4.4) es la **solución formal** porque no podemos asegurar que sea una verdadera solución, es decir, que $f(x)$ pueda representarse mediante una serie trigonométrica. Por tora parte, aunque la linealidad garantiza que una combinación lineal finita de solucines, es solución, nuestra combinación lineal es infinita, por lo que tendríamos que comprobar que efectivamente es solución (derivando y sustituyendo en la ecuación) y este es un proceso difícil , aunque en nuestro caso se garantiza por la presencia del término exponencial en la solcuión formal, ya que si $n \longrightarrow +\infty$, entonces $\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 t\right) \longrightarrow 0$.

Cualitativamente la ecuación describe un proceso de difusión del calor a través de la barra, la barra disipa el calor convergiendo a 0 y suavizando cualquier irregularidad que $f(x)$ pueda tener. Aplicamos este análisis a un ejemplo concreto

---

Ejemplo 8 *Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1,14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:*

1. $u(0,x) = 65\cos^2(\pi x)$ *con* $0 \le x \le 2$.
2. $u(0,x) = 70\,\mathrm{sen}(\pi x)$ *con* $0 \le x \le 2$.
3. $u(0,x) = \begin{cases} 60x & si \quad x \in [0,1[\\ 60(2-x) & si \quad x \in [1,2] \end{cases}$.
4. $u(0,x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1[\\ 75 & si \quad x \in [1,2] \end{cases}$.

4.4.2. Ecuación de onda

La ecuación de onda representa las vibraciones de una cuerda sujeta por los extremos a lo largo del tiempo. Si L es la longitud de la cuerda y $u(t,x)$ representa el desplazamiento de la cuerda respecto de la horizontal en cada instante y en cada posición de la cuerda, la ecuación viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{cc} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ x \in]0,L[\\ u(0,x) = f(x), & x \in]0,L[\\ u_t(0,x) = g(x), & x \in]0,L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0, & t > 0 \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Como en el caso de la ecuación del calor, las condiciones

$$u(t,0) = u(t,L)$$

son condiciones de contorno e indican que los extremos de la cuerda son fijos y situados en el eje horizontal. Mientras, la condición

$$u(0,x) = f(x)$$

es una condiciónn inicial e indica la forma de la cuerda en el instante inicial y la condición

$$u_t(0,x) = f(x)$$

sería otra condición inicial que indica la velocidad (fuerza aplicada sobre la cuerda) que tiene la cuerda en el instante inicial.

Como en el caso de la ecuación del calor utilizaremos el método de separación de variables, suponiendo por tanto que la solución $u(x,t)$ tiene la forma

$$u(t,x) = F(t)\,G(x)$$

por lo que

$$u_x = F(t)\,G'(x)\,, \qquad u_{xx} = F(t)\,G''(x) \qquad \text{y} \qquad u_{tt} = F''(t)\,G(x)$$

y sustituyendo en la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Longleftrightarrow F''(t)\,G(x) = c^2 F(t)\,G''(x)\,.$$

Descartando la solución trivial $u \equiv 0$ podemos suponer entonces que $F \neq 0 \neq G$ y entonces

$$\frac{1}{c^2}\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}$$

Como cada miembro de la ecuación depende de una y solo una de las variables independientes, así que ambos deben ser constantes

$$\frac{1}{c^2}\frac{F''(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -\lambda \tag{4.6}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, y el signo se toma por convección.

De la igualdad (4.6) otenemos dos ecuaciones diferenciales

$$F''(t) + \lambda c^2 F(t) = 0$$

y

$$G''(x) + \lambda G(x) = 0.$$

Por otro lado de las consiciones de contorno obtenemos

$$u(t,0) = 0 \Longrightarrow F(t)\,G(0) = 0$$

y

$$u(t,L) = 0 \Longrightarrow F(t)\,G(L) = 0$$

que con t arbitraría implica que

$$G(0) = G(L) = 0.$$

Consideremos ahora el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(x) + \lambda G(x) = 0, \\ G(0) = G(L) = 0 \end{cases}$$

que coincide con el problema de contorno que se obtuvo para la ecuación del calor y ,por tanto, los valores para λ y $G(x)$ deben ser los mismos, es decir,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad \text{y} \qquad G_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para estos valores de λ_n tenemos

$$F''(t) + \lambda c^2 F(t) = 0 \Longrightarrow F''(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} F(t) = 0$$

cuya solución general para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \text{ con } C_n,\ D_n \in \mathbb{R}.$$

Finalmente una posible solución para la EDP será de la forma

$$u(t,x) = \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con $a_n = C_n B_n$ y $b_n = D_n B_n$. Pero con la EDO es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es solución, y consideraremos como solución general formal a

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-a_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Si ahora utilizamos las condiciones iniciales $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = g(x)$ se tiene que

$$u(0,x) = f(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

$$u_t(0,x) = g(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x).$$

y si tomamos

$$d_n = b_n \frac{n\pi c}{L}$$

podemos escribir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

que son desarrollos similares a los encontrados en la ecuación del calor.

Podemos calcular el valor de los coeficientes a_n y d_n si observamos ambas expresiones como desarrollos de FOurier, concretamente las extensiones impares de $f(x)$ y $g(x)$, respecivamente, por tanto

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

y

$$d_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Longrightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Ejemplo 9 *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0,\ x \in \,]0, 2\pi[\\ u(0,x) = \cos x - 1, & x \in \,]0, 2\pi[\\ u_t(0,x) = 0, & x \in \,]0, 2\pi[\\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

4.4.3. Ecuación de Laplace

En esta sección vamos a tratar la EDP llamada Ecuación de Laplace que en dos dimensiones tiene la forma

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{4.7}$$

En esta expresión se utilizan las variables espaciales para idicar que mientras en las ecuaciones de calor y de onda representan modelos físicos que cambian con el tiempo, la Ecuación de Laplace es estática y representa una condición de equilibrio como el potencial gravitatorio o electrostático o como la temperatura en una sección plana.

Esta ecuación se plantea solo con condiciones de contorno sobre la frontera del recinto donde se cumpla la ecuación que tiene que tener cierta regularidad. Estas condiciones de contorno puden ser de dos tipos:

1. **Condiciones tipo Dirichlet**: Si R es la región donde se cumple la ecuación (4.7), podemos suponer que $u(x,t)$ es conocida en todos los puntos de la frontera de R. Son condiciones en la función u.

2. **Condiciones tipo Neumann**: Podemos suponer que conocemos el vector normal a R en la frontera. Son condiciones impuestas a las derivadas de u: u_x o u_y.

La geometría de R es muy importante y solo podemos calcular soluciones si tienen ciertas condiciones de regularidad.

Condiciones tipo Dirichlet

Supongamos, por ejemplo, que el recinto es un rectángulo R de lados a y b, es decir, $R = [0, a] \times [0, b]$ y que tenemos el problema de Laplace siguiente (para estos problemas todas las condiciones son de contorno):

$$\left\{ \begin{array}{cl} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in R \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, a] \\ u(0, y) = 0, & y \in [0, b] \\ u(a, y) = f(y), & y \in [0, b] \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Utilizando de nuevo el método de separación de variables tenemos que la solución de la EDP será de la forma

$$u(x, y) = F(x) G(y)$$

y, por lo tanto,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Longrightarrow F''(x) G(y) + F(x) G''(y) = 0.$$

Si descartamos la solución trivial $u \equiv 0$ (identicamente nula) tenemos que $F(x) \neq 0 \neq G(y)$, por lo que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}$$

y tenemos una ecuación con las variables separadas de donde

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

De la doble igualdad anterior (4.9) se obtienen dos ecuaciones diferenciales

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

y

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0.$$

Por otro lado de las condiciones de contorno se obtienen

$$u(x, 0) = F(x) G(0) = 0 \Longrightarrow G(0) = 0$$

y

$$u(x,b) = F(x)\,G(b) = 0 \Longrightarrow G(b) = 0.$$

La función $G(y)$ se obtiene entonces resolviendo el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(y) + \lambda G(y) = 0, \\ G(0) = G(b) = 0 \end{cases}$$

que es el mismo problema de contorno que se obtuvo para las ecuaciones del calor y de onda (salvo que cambiamos la variable x por la y y que $L = b$), por tanto, para obtener una solución no trivial, los valores para λ y $G(y)$ serán

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad \text{y} \qquad G_n(y) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

para cada $n \geq 1$.

Sustituyendo estos valores λ_n en la otra EDO se obtiene que

$$F''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2}F(x) = 0$$

cuya solución para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F(x) = F_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \text{ con } C_n,\ D_n \in \mathbb{R}.$$

Por la condición de contorno $u(0,y) = 0$ se tienesen

$$u(0,y) = F(0)\,G(y) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0$$

y por tanto

$$0 = F_n(0) = C_n e^{\frac{n\pi}{b}0} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b}0} = C_n + D_n \Longrightarrow D_n = -C_n$$

y la función $F_n(x)$ se reescribiría de la forma

$$\begin{aligned} F_n(x) &= C_n e^{\frac{n\pi}{b}x} - C_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \\ &= 2C_n \frac{e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}}{2} \\ &= 2C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \text{ con } C_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto la solución de la EDP será, para cada $n \geq 1$, de la forma

$$u(x,y) = 2B_nC_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

donde $c_n = 2B_nC_n$.

Como la ecuación es lineal cualquier combinación lineal de soluciones, es otra solución, por tanto podemos considerar como solución general formal a

$$u(x,y) = \sum_{n\geq 1} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

y utilizando la última condición de contorno $u(a,y) = f(y)$ se tiene

$$f(y) = \sum_{n\geq 1} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \sum_{n\geq 1} d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Como ha ocurrido en las anteriores EDP estudiadas podemos calcular el valor de los coeficientes d_n si observamos la expresión anterior como el desarrollo de Fourier de la extensión impar de $f(y)$, por lo que

$$d_n = c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

de donde

$$c_n = \frac{2}{b\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy.$$

Condiciones de Neumann

Veamos un ejemplo de resolución de un problema con condiciones de tipo Neumann

$$\left\{\begin{array}{cc} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in R \\ u_y(x,0)=u_y(x,b)=0, & x\in[0,a] \\ u_x(0,y)=f(y), & y\in[0,b] \\ u_x(a,y)=0, & y\in[0,b] \end{array}\right. \tag{4.10}$$

vemos que en este caso las condiciones de contorno implican a las derivadas parciales de u y todas las condiciones son de contorno.

Como en los ejemplos anteriores utilizamos el método de separación de variables

$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

que nos conduce a las dos ecuaciones diferenciales (como en los casos anteriores descartamos la solución trivial $u \equiv 0$ y por tanto $F(x) \neq 0 \neq G(y)$)

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

y

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0.$$

Las diferencias con las condiciones de tipo Dirichlet aparecen al plantear las condiciones de contorno de estos dos problemas. Observemos que en este caso $u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0$ y por tanto las condiciones de contorno para las ecuaciones diferenciales se obtienen de la siguiente forma

$$u_y(x,y) = F(x)G'(y) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_y(x,0) = F(x)G'(0) = 0 \Longrightarrow G'(0) = 0, \\ u_y(x,b) = F(x)G'(b) = 0 \Longrightarrow G'(b) = 0, \end{array}\right.$$

y también

$$u_x(x,y) = F'(x)G(y) \Longrightarrow u_x(a,y) = F'(a)G(y) = 0 \Longrightarrow F'(a) = 0.$$

Utilizando la segunda EDO y las condiciones encontradas para $G'(y)$ tenemos el siguiente PC

$$\left\{ \begin{array}{l} G''(y) + \lambda G(y) = 0, \\ G'(0) = G'(b) = 0. \end{array} \right.$$

que resolveremos distinguiendo entre los posibles valores de λ.

1. **Caso** $\lambda = 0$. Para este caso

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0 \Longrightarrow G''(y) = 0$$

e integrando

$$G'(y) = A \qquad \text{y} \qquad G(y) = Ay + B$$

con A, $B \in \mathbb{R}$. Aplicando ahora las condiciones de contorno

$$G'(0) = G'(b) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$$

por tanto

$$G(y) = B$$

y entonces

$$u(x,y) = F(x)\,B.$$

Utilizando este resultado y la EDP se tiene que

$$\left. \begin{array}{r} u_{xx}(x) = F''(x)\,B, \\ u_{yy}(x,b) = 0, \end{array} \right\} \Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = F''(x)\,B = 0$$

de donde o bien $B = 0$, pero entonces $u(x,y) = 0$ lo que contradice la suposición establecida, o bien $F''(x) = 0$ y por tanto

$$F(x) = Cx + D.$$

De esta forma la solución será

$$u(x,y) = F(x)\,B = (Cx + D)\,B = CBx + DB = \alpha x + \beta,$$

donde $\alpha = CB$ y $\beta = DB$, y utilizando la condición de contorno nula en x

$$\left. \begin{array}{r} u_x(a,y) = 0, \\ u_x(x,y) = \alpha, \end{array} \right\} \Longrightarrow \alpha = 0$$

lo que nos daría como solución de la EDP

$$u(x,y) = \beta.$$

2. **Caso** $\lambda = -\mu^2 < 0$. Para este caso

$$\left\{ \begin{array}{c} G''(y) - \mu^2 G(y) = 0, \\ G'(0) = G'(b) = 0. \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$G(y) = Ae^{\mu y} + Be^{-\mu y}.$$

Utilizando las condiciones de contorno para

$$G'(y) = A\mu e^{\mu y} - B\mu e^{-\mu y}$$

se tiene

$$\begin{aligned} G'(0) &= 0 \Longrightarrow A\mu - B\mu = 0 \Longrightarrow \mu(A - B) = 0 \Longrightarrow A - B = 0, \\ G'(b) &= 0 \Longrightarrow A\mu e^{\mu b} - B\mu e^{-\mu b} = 0 \Longrightarrow \mu\left(Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b} = 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación $A = B$ y sustituyendo en la segunda

$$Ae^{\mu b} - Be^{-\mu b} = A\left(e^{\mu b} - e^{-\mu b}\right) = 0$$

por lo que $A = 0$, lo que implicaría la solución trivial, o bien

$$e^{\mu b} - e^{-\mu b} = 0 \Longrightarrow e^{\mu b} = e^{-\mu b} \Longrightarrow b = 0$$

que también nos lleva a la solución trivial.

3. **Caso** $\lambda = \mu^2 > 0$. Para este caso

$$\left\{ \begin{array}{c} G''(y) + \mu^2 G(y) = 0, \\ G'(0) = G'(b) = 0. \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$G(y) = A\cos(\mu y) + B\sin(\mu y).$$

Utilizando las condiciones de contorno para

$$G'(y) = -\mu A\sin(\mu y) + \mu B\cos(\mu y)$$

se tiene

$$G'(0) = B\mu = 0 \Longrightarrow B = 0$$

y

$$G'(b) = -\mu A\sin(\mu b) + \mu B\cos(\mu b) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} -\mu A \sin(\mu b) &= 0 \Longrightarrow \mu b = n\pi \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{b} \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto para cada valor de n tendremos la función

$$G_n(y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right).$$

Sustituyendo los valores obtenidos de μ en $F''(x) - \lambda F(x) = 0$ se tiene

$$F''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} F(x) = 0$$

que tiene por solución

$$F(x) = Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}.$$

Como hemos visto antes que $F'(a) = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} F'(x) &= C\mu e^{\mu x} - D\mu e^{-\mu x} \Longrightarrow Ce^{a\mu} - De^{-a\mu} = 0 \\ &\Longrightarrow Ce^{a\mu} = De^{-a\mu} \\ &\Longrightarrow D = Ce^{2a\mu} \end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$F(x) = F_n(x) = C_n e^{\mu x} + C_n e^{2a\mu} e^{-\mu x} = C_n \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} + e^{-\frac{n\pi}{b} x} e^{2\frac{an\pi}{b}}\right).$$

La solución formal será, recordando la solución que se obtuvo para el caso $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n C_n \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} + e^{-\frac{n\pi}{b} x} e^{2\frac{an\pi}{b}}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ &= \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} + e^{-\frac{n\pi}{b} x} e^{2\frac{an\pi}{b}}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \end{aligned}$$

donde $c_n = A_n C_n \in \mathbb{R}$.

Utilizando ahora la última condición de contorno $u_x(0, y) = f(y)$ como

$$u_x(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi}{b} \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} - e^{-\frac{n\pi}{b} x} e^{2\frac{an\pi}{b}}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi}{b}\left(1-e^{2\frac{an\pi}{b}}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=f(x)$$

donde

$$d_n = c_n \frac{n\pi}{b}\left(1-e^{2\frac{an\pi}{b}}\right)$$

son los coeficientes del desarrollo de Fourier de la extensión par de $f(y)$ y por tanto

$$d_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

es decir

$$c_n=\frac{2}{n\pi\left(1-e^{2\frac{an\pi}{b}}\right)}\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

4.4.4. Condiciones de contorno no nulas

En todas las ecuaciones anteriores hemos considerado que las condiciones de contorno eran nulas, pero podemos resolver el problema en el caso de no se cumpla esta propiedad. Por ejemplo, para un problema del calor con condiciones no nulas de la forma:

$$\left\{\begin{array}{cc} u_t=\alpha^2 u_{xx}, & t>0,\ x\in\,]0,L[\,, \\ u(0,x)=f(x), & x\in\,]0,L[\,, \\ u(t,0)=A, & t>0, \\ u(t,L)=B, & t>0. \end{array}\right. ,$$

realizamos el siguiente cambio en la variable dependiente

$$v(t,x)=(u(t,x)-A)+\frac{x}{L}(A-B)$$

de esta forma las condiciones de contorno para $v(t,x)$ son

$$\begin{aligned} v(t,0) &= (u(t,0)-A)+\frac{0}{L}(A-B)=(A-A)=0 \\ v(t,L) &= (u(t,L)-A)+\frac{L}{L}(A-B)=(B-A)+(A-B)=0 \end{aligned}$$

y la condición inicial

$$u(0,x)=f(x)$$

se transforma en

$$v(0,x)=(u(0,x)-A)+\frac{x}{L}(A-B)=f(x)-A+\frac{x}{L}(A-B)=g(x).$$

Las derivadas parciales serían

$$\begin{aligned} v_t &= u_t \\ v_x &= u_x + \frac{1}{L}(B-A) \\ v_{xx} &= u_{xx} \end{aligned}$$

y el problema se transforma en el siguiente con condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{xx}, & t>0,\ x\in\,]0,L[\,, \\ v(0,x) = f(x) - A + \frac{x}{L}(A-B), & x\in\,]0,L[\,, \\ v(t,0)=0, & t>0, \\ v(t,L)=0, & t>0. \end{cases}$$

El cambio también es válido para condiciones de contorno no nulas en la ecuación de onda, de forma que si tenemos un problema de la forma

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t>0,\ x\in\,]0,L[\,, \\ u(0,x) = f(x), & x\in\,]0,L[\,, \\ u_t(0,x) = g(x), & x\in\,]0,L[\,, \\ u(t,0)=A, & t>0, \\ u(t,L)=B, & t>0. \end{cases},$$

haciendo el mismo cambio de antes tendremos condiciones de contorno nulas, mientras que las condiciones iniciales serían

$$\begin{aligned} v(0,x) &= (f(x)-A) + \frac{x}{L}(A-B), \\ v_t(0,x) &= u_t(0,x) = g(x), \end{aligned}$$

y el problema sería

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & t>0,\ x\in\,]0,L[\,, \\ v(0,x) = (f(x)-A) + \frac{x}{L}(A-B) & x\in\,]0,L[\,, \\ v_t(0,x) = g(x) & x\in\,]0,L[\,, \\ v(t,0)=0 & t>0, \\ v(t,L)=0 & t>0. \end{cases}.$$

Para el caso de la ecuacíón de Laplace hay que tener en cuenta si las condiciones son de tipo Dirichlet o Neumann y en la mayoría de las ocasiones es posible descomponer el problema inicial en dos o más problemas con condiciones nulas.

4.5. Ejercicios propuestos

1. Encuentre las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$

c) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$

d) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

e) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

f) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

2. Para qué valores de λ tiene soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

   a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)\, y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

   b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

3. Clasifique las siguientes EDP y encuentre su forma canónica:

   a) $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0.$

   b) $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0.$

   c) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0.$

   d) $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0.$

   e) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0.$

4. Los extremos de una barra de aluminio $\left(\alpha^2 = 0{,}86\right)$ de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de $0^o C$. Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

   a) $u(0,x) = 70, \quad 0 \le x \le 10.$

   b) $u(0,x) = 70\cos x, \quad 0 \le x \le 10.$

   c) $u(0,x) = \begin{cases} 10x & x \in [0,5) \\ 10\,(10-x) & x \in [5,10] \end{cases}.$

   d) $u(0,x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,3) \\ 65 & x \in [3,10] \end{cases}.$

5. Los extremos de una barra de cobre $\left(\alpha^2 = 1{,}14\right)$ de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de $0^o C$. Encuentre la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales:

   a) $u(0,x) = 65\cos^2(\pi x), \quad 0 \le x \le 2.$

   b) $u(0,x) = 70\,\mathrm{sen}\, x, \quad 0 \le x \le 2.$

   c) $u(0,x) = \begin{cases} 60x & x \in [0,1) \\ 60\,(2-x) & x \in [1,2] \end{cases}.$

d) $$u(0,x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 75 & x \in [1,2] \end{cases} .$$

6. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ es aquella que no varía con el tiempo. Demostrar:

   a) Todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma $u(x) = A + Bx$.

   b) Encuentre los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen $u(t,0) = T_1$ y $u(t,L) = T_2$.

   c) Resuelva el problema

   $$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,x) = 75 & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 20 & \\ & t > 0 \\ u(t,1) = 60 & \end{cases}$$

   Ayuda: Calcúlela como $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$, donde $v(y)$ es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno $u(t,0) = 20$, $u(t,L) = 60$ y $u(t,x)$ es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

7. Los extremos de una barra de cobre $\left(\alpha^2 = 1{,}14\right)$ de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de $0^o C$, mientras que el centro de la barra es mantenido a $100^o C$ mediante una fuente de calor externa. Encontrar la temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial
   $$u(0,x) = \begin{cases} 50 & x \in [0,5) \\ 100 & x \in [5,10] \end{cases} .$$

   Ayuda: Descomponga el problema en dos problemas de contorno con uno de los extremos en la mitad de la barra.

8. Resuelva el problema

   $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0,1) \\ u(0,x) = \cos x & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 0 & \\ & t > 0 \\ u(t,L) = 0 & \end{cases}$$

9. Resuelva los siguientes problemas

$$a) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 2\pi) \\ u(0, x) = \cos x - 1 & 0 < x < 2\pi \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < 2\pi \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 1) \\ u(0, x) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_t(0, x) = 1 & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, 3) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 3 \\ u_t(0, x) = 0 & 0 < x < 3 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, 2\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$\text{donde } f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2) \\ 2 - x & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

10. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describe su movimiento suponiendo que $c^2 = 1$.

11. Demuestra que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

transforma la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en la ecuación $u_{\xi\eta} = 0$. Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Para funciones apropiadas F y G.

12. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, x \in (0, L) \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

es de la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left(F(x - ct) + F(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

donde F es la extensión $2L$–periódica e impar de $f(x)$.

13. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + u, & t > 0, x \in (0, L) \\ u(0,x) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(0,x) = 0 & 0 < x < L \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

14. Resuelva el problema

$$a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < a \\ u(x,b) = g(x) & 0 < x < a \\ u(0,y) = 0 & 0 < y < b \\ u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < a \\ u(x,b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0,y) = g(y) & 0 < y < b \\ u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < a \\ u(x,b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0,y) = g(y) & 0 < y < b \\ u(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

15. Resuelva los siguientes problema de Neumann

$$a) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_y(x,0) = 0 & 0 < x < a \\ u_y(x,b) = 0 & 0 < x < a \\ u_x(0,y) = f(y) & 0 < y < b \\ u_x(a,y) = 0 & 0 < y < b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_x(0,y) = 0 & 0 < y < b \\ u_x(a,y) = 0 & 0 < y < b \\ u_y(x,0) = f(x) & 0 < x < a \\ u_y(x,b) = 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_x(0,y) = 1 & 0 < y < b \\ u_x(a,y) = 0 & 0 < y < b \\ u_y(x,0) = 1 & 0 < x < a \\ u_y(x,b) = 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

16. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, & (x, y) \in (0,1) \times (0,1) \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(x,1) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0,y) = f(y) & 0 < y < 1 \\ u(1,y) = 0 & 0 < y < 1 \end{cases}$$